на правах рукописи

КУРМАЕВА Кристина Владимировна

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ КОВАЛЕВСКОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2007

Работа выполнена в Уральском государственном университете путей сообщения на кафедре "Прикладная математика".

Научный руководитель:
– доктор физико-математических наук, профессор С.С. Титов

Официальные оппоненты:
– доктор физико-математических наук, профессор С.В. Хабиров
– доктор физико-математических наук, профессор В.В. Башуров

Ведущая организация:
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Защита состоится 31 января 2007 года в 13.30 на заседании диссертационного совета Д.004.006.01 совета Института математики и механики УрО РАН. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН.

Автореферат разослан 21 декабря 2006 года.
Ученый секретарь диссертационного совета
ведущий научный сотрудник,
доктор физ.-мат. наук Н.Ю. Лукоянов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Данная работа посвящена доказательству аналогов теоремы Ковалевской и построению аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, не относящихся к классу уравнений типа Ковалевской. Таковы уравнения с особенностью типа осевой или сферической симметрии. Рассмотрены уравнения, описывающие осесимметричные течения идеального газа, и построены их решения, в том числе, содержащие особенности. Эти решения использованы, в том числе, при исследовании свойств звуковой линии в трансзвуковых течениях в случае осевой симметрии.

Актуальность темы. Математические модели многих физических процессов, изучаемых в газовой динамике, описываются с помощью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с особенностью. Здесь особенности понимаются как обусловленные физической моделью точки неаналитичности коэффициентов решаемых уравнений. Данное обстоятельство приводит к невозможности применения теоремы Коши, обосновывающей для обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью построение аналитического решения в виде степенных рядов, а также теоремы Ковалевской, обобщающей теорему Коши для дифференциальных уравнений с частными производными, в которых возможно выделение в явном виде старшей производной. Для изучения решений уравнений с особенностью в 1975 г. А.Ф. Сидоровым был предложен метод построения решения в виде специальных рядов, в которых

1. решения строятся в виде ряда по степеням базисных функций, обеспечивающих рекуррентное вычисление коэффициентов ряда путем последовательного решения линейных задач, что приводит к конструктивному определению формального ряда;

2. нулевой (главный) член ряда определяется из точного решения или из нелинейной задачи;

3. первые члены ряда дают достаточно точное приближение и хорошо описывают особенности решений;

4. сходимость построенного ряда доказывается на основе применения аналогов теоремы Ковалевской или ее современных аналогов – теорем Овсянникова.

Платформой для систематического применения специальных рядов к нелинейным задачам математической физики послужили работы А.А. Дородницына, Л.В. Овсянникова по построению аналитического решения характеристической задачи Коши по степеням характеристической переменной для осесимметричных течений газа. К ним примыкают также работы А.Ф. Сидорова и Е.Н. Зубова по решению задачи о вдвижении поршня в покоящийся газ. Отметим, что в этих работах сходимость построенных характеристических рядов не доказана, при этом обоснование предложенного метода проведено с помощью численных расчетов прикладных газодинамических задач. Позднее, для доказательства сходимости таких характеристических рядов С.П. Баутиным был предложен модифицированный метод мажорант С.В. Ковалевской. В 1976 году этот метод был распространен на общие квазилинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных. В 1975-1977 годах М.Ю. Козмановым осуществлено решение краевых задач для гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка с двумя переменными в виде характеристических рядов, с приложениями в газовой динамике. В 1977-1982 годах В.М. Тешуковым построены кусочно-гладкие решения газодинамических задач в виде формальных рядов, сходимость которых доказана в окрестности характеристической поверхности. В дальнейшем В.М. Тешуковым полученные результаты были обобщены в виде метода инвариантных мажорант, разработанного на основе метода группового анализа, который описан в книге Н.Х. Ибрагимова.

Дальнейший этап развития специальных рядов связан с логарифмическими рядами. Так, в 1975 году в решении задачи примыкания двойных волн к области покоя наряду со степенями характеристической переменной применяются степени ее логарифмов. С.В. Вершининым и А.Ф. Сидоровым осуществлено построение такого формального ряда, а методом специальных мажорант С.С. Титовым доказана сходимость в случае осесимметрической двойной волны. Позже в общем случае сходимость этого ряда была доказана С.П. Баутиным. В 1990–2006 гг. С.В. Вершининым метод построения формальных рядов для уравнений с особенностью был значительно модифицирован с использованием компьютерной математики, что дало возможность применить его к новым задачам газовой динамики. В дальнейшем метод С.С. Титова экспоненциальных мажорантных оценок был обобщен, что способствовало созданию теории логарифмических рядов с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами для решения уравнений с особенностью, в том числе для уравнений типа Фукса. Для этих рядов доказана теорема сходимости в окрестности особой точки, что и дает обоснование метода. Введение дополнительной логарифмической переменной позволяет уточнить зависимость решения от логарифма и рекуррентно определить коэффициенты ряда. Логарифмические ряды относятся к так называемым согласованным рядам, которые представляют одно из направлений специальных рядов, отличное от характеристических рядов. В этом случае конструкции ряда учитывают особенности исследуемых уравнений. Классификации рядов проведена в работах М.Ю. Филимонова. С помощью согласованного ряда М.Ю. Филимоновым построен также класс решений для уравнения потенциала скорости, описывающего стационарные течения газа в осесимметричном случае, и исследована сходимость такого ряда.

Использование метода специальных рядов способствовало не только доказательству новых теорем существования и единственности (причём для уравнений, не относящихся к типу Ковалевской), но и решению начальных и начально-краевых задач, с рассмотрением проблематики ускорения сходимости, выделения и локализации особенностей. Продвижение в этом направлении позволило получить значительные теоретические и прикладные результаты в задачах, не поддававшихся решению другими методами. Данная работа непосредственно примыкает к вышеописанным работам в плане применения аналитического метода специальных рядов для решения уравнения полного потенциала скорости стационарного движения идеального газа в осесимметрическом случае, а также в плане построения решения асимптотической модели нестационарного трансзвукового течения.

Другой актуальной задачей газовой динамики, рассматриваемой в данной работе, является задача о прямой звуковой линии и о наличии на ней особенностей на конечном расстоянии от оси симметрии. Практический интерес к соплам с прямой звуковой линией связан с профилированием сопел аэродинамических труб и реактивных двигателей. Сверхзвуковую часть в этом случае можно профилировать независимо от дозвуковой, поскольку прямолинейная звуковая линия является одновременно характеристикой. Задать a priori контур сопла, обеспечивающей прямолинейную звуковую линию, на практике оказывается сложной задачей. С другой стороны, в рамках обратной задачи рассчитать сопла Лаваля с прямолинейной линией перехода достаточно просто. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в минимальном сечении контур сопла и все линии тока имели нулевые первые, вторые и третьи производные. Решением данной задачи занимались многие ученые, например, О.И. Кацкова, А.Н. Крайко, Л.В. Овсянников, О.С. Рыжов, У.Г. Пирумов, Ф.И. Франкль, Ю.Д. Шмыглевский, G.H. Görtler. При этом их подходы к решению задачи о прямой звуковой линии различны. О.И. Кацковой, Ю.Д. Шмыглевским при изучении сверхзвукового течения постулируется, что звуковая линия является прямой. Здесь решения записаны в виде степенных рядов, которые преобразуются к удобному для расчетов виду. Все результаты расчетов представлены в обширных таблицах. При этом та часть течения, которая примыкает к прямой звуковой линии, рассчитывается методом рядов, остальная – с помощью метода характеристик. Расчеты в осесимметричных течениях реального газа по данной методике проведены О.И. Кацковой совместно с А.Н. Крайко. При решении поставленной задачи постулируется, что переходная поверхность через скорость звука является прямой. Расчеты проводятся численно в окрестности звуковой линии с привлечением степенных рядов. На самой звуковой линии численные алгоритмы не работают, так как осесимметричная задача содержит особенность. Более того, метод характеристик, например, не применим и в плоском случае, потому что прямая звуковая линия является характеристикой. В связи с задачей о прямой звуковой линии А.Н. Крайко рассмотрел ряд нестандартных вариационных задач газовой динамики, им предложен нестандартный принцип максимума для дозвуковых потоков как усиление результатов, полученных D. Gilbarg, M. Shiffman. В представленной диссертационной работе звуковая линия исследуется аналитически в окрестности оси симметрии и доказывается, что она является прямой, из свойств распределения скорости газа на этой оси, причём обосновывается наличие особенностей на конечном расстоянии от оси симметрии. Вид особенностей на звуковой линии в диссертации не изучается, а лишь обосновывается, что потенциал скорости газа в этих точках обращается в бесконечность, в отличие, например, от работ У.Г. Пирумова.

У.Г. Пирумов рассматривает аналитический подход и построенный на его результатах численный подход к исследованию до- и сверхзвуковой областей сопел с прямолинейной линией перехода, основанный на построении решения в виде ряда по степеням продольной переменной x в окрестности прямолинейной звуковой линии. Учитывая, что на прямолинейной звуковой линии $u = 1, v = 0$, где (u, v) – вектор скорости, У.Г. Пирумов получает условия

Гёртлера $u_1(r) = v_1(r) = v_2(r) \equiv 0$, которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы линия $x = 0$ была прямой звуковой линией. Условия Гёртлера задаются в некоторой окрестности точки $r = 0$, то есть в интервале $|r| < R$. Таким образом, У.Г. Пирумовым ставится характеристическая задача Коши на прямолинейной звуковой линии $x = 0$ и решается в ее окрестности. Приравнивая коэффициенты при степенях x, У.Г. Пирумов получает бесконечную цепочку дифференциальных уравнений относительно коэффициентов ряда, для которой при $r = 0$ задается бесконечная цепочка граничных условий, и далее численно исследует наличие особенностей на прямолинейной звуковой линии. У.Г. Пирумов использует термин "прямолинейная звуковая линия", в представленной диссертации для краткости использован термин "прямая звуковая линия", так как другие, например, непрямолинейные звуковые линии, в данной работе не исследуются.

О.С. Рыжовым рассмотрена проблема плоской звуковой поверхности $x = 0$, где течение изначально задается в трехмерной окрестности начала координат в аналитическом виде

$$\Phi = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} a_{l,2m,2n} x^l y^{2m} z^{2n}.$$

Далее, на плоскости $x = 0$ ставятся определенные условия, названные – О.С. Рыжовым – условиями всестороннего сжатия или расширения потока. О.С. Рыжовым доказана теорема, которая обобщает теоремы Франкля, Гёртлера на случай пространственных течений в предположении так называемого всестороннего сжатия или расширения потока. Доказательство теоремы осуществляется в два этапа: вначале, О.С. Рыжов получает определение плоской линии перехода через скорость звука, далее, из этого определения О.С. Рыжов получает пространственные условия Гёртлера, поставленные при $x = 0$ для любых y, z. Такую постановку задачи назовем проблемой звуковой линии, решаемой в виде Гёртлера, У.Г. Пирумова, О.С. Рыжова, Ф.И. Франкля.

В диссертации рассмотрено решение задачи о прямой звуковой линии в виде Л.В. Овсянникова, которая заключается в исследовании трансзвукового течения в предположении, что потенциал $\Phi(x, 0)$ на оси симметрии $r = 0$ является заданной аналитической функцией по степеням x (в окрестности точки $x = 0$ на оси симметрии $r = 0$). Л.В. Овсянников в отличие от Гёртлера, У.Г. Пирумова, О.С. Рыжова, Ф.И. Франкля рассматривает задачу о прямой звуковой линии в другом виде, а именно, решает характеристическую задачу Коши, поставленную на оси симметрии $r = 0$ или на плоскости симметрии сопла и получает достаточные условия того, что линия перехода будет прямой (условие симметрии, условие уплощения звуковой линии в центре течения). В случае плоских и осесимметричных течений для этого необходимо задать на оси симметрии распределение скорости, имеющей равную нулю первую производную в звуковой точке. В такой постановке Л.В. Овсянниковым решена проблема прямой звуковой линии для случая плоской симметрии. Подводя итог вышеизложенному, можно сказать, что решение задачи о прямолинейной звуковой линии по Гёртлеру, У.Г. Пирумову, О.С. Рыжову заключается в задании условий непосредственно на самой плоскости (прямой) $x = 0$, а затем доказательстве, что эта плоскость (прямая) действительно будет плоскостью (прямой) перехода через скорость звука; по Л.В. Овсянникову – в задании условий на оси симметрии $r = 0$, а затем доказательстве, что поверхность (кривая) перехода через скорость звука будет плоской (прямой). Таким образом, отличие подхода к задаче о прямолинейной звуковой линии по Гёртлеру, У.Г. Пирумову, О.С. Рыжову от подхода Л.В. Овсянникова заключается в различной постановке краевых условий: начальные условия задаются либо на звуковой линии, либо на центральной линии течения.

Проблема переноса результата Л.В. Овсянникова с плоских течений на осесимметричные заключается в том, будут ли два условия – условие осевой симметрии и условие уплощения звуковой линии в центре течения – достаточными для того, чтобы линия звукового перехода была прямой. Эта проблема решена во второй главе диссертационной работы.

Второй частью проблемы о прямой звуковой линии является исследование наличия на ней особенностей. В работах У.Г. Пирумова рассматриваются течения с прямолинейной звуковой линией, содержащей особенности, при этом подробное исследование картины течения в окрестности особенностей проводится численно. Отметим, что в работе О.С. Рыжова не рассматриваются особенности течений. Л.В. Овсянниковым аналитически строго доказано обязательное наличие особенностей на прямой звуковой линии в основном течении (в плоском случае, с привлечением эллиптических функций) при условии отличия от нуля скорости ускорения газа в центре течения. В диссертации аналитический результат Л.В. Овсянникова о наличии особенностей на прямой звуковой линии перенесен на случай осевой симметрии. Кроме этого, Л.В. Овсянниковым высказано утверждение о возможности отсутствия особых точек на прямой звуковой линии в случае равенства нулю скорости ускорения течения на ней. В данной работе построены автомодельные решения, описывающие трансзвуковое течение без особенностей.

Цели работы.

1. Доказательство аналогов теоремы Ковалевской, построение и исследование аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с особенностью, описывающих осесимметричные течения идеального газа.

2. Приложение аналогов теорем Ковалевской и Овсянникова к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных применительно к решению задачи о прямой звуковой линии, об отсутствии или наличии на ней особенностей на конечном расстоянии от оси симметрии в осесимметричных течениях газа.

Методы исследования. В работе использован аналитический метод специальных рядов, позволяющий исследовать нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие особенность. Решения построены в виде двойных логарифмических рядов. Проводится анализ структуры коэффициентов аналитического решения в виде ряда. Для коэффициентов рядов построены рекуррентные цепочки уравнений. Сходимость построенных рядов доказана методом специальных мажорант, являющихся решением уравнений типа Ковалевской. Для исследования свойств звуковой линии в осесимметричном случае используется специфические свойства уравнений и моделируемых газодинамических задач.

Научная новизна. Доказаны новые теоремы существования и единственности решений начально-краевых задач для различных моделей течений, в том числе для уравнений газовой динамики как аналоги теоремы Ковалевской в случае осевой симметрии. Доказана новая теорема существования и единственности о наличии прямой звуковой линии с особенностью на конечном расстоянии от оси симметрии в осесимметрическом случае, как обобщение теоремы Овсянникова, доказанной в случае плоской симметрии. Построено новое семейство автомодельных решений осесимметричного уравнения Кармана, дающих примеры течений, не имеющих особенностей на прямой звуковой линии.

Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая ценность. Разработана методика доказательства аналогов теорем Ковалевской для уравнений с особенностью типа осевой симметрии. Построены локально сходящиеся ряды, являющиеся решением дифференциальных уравнений в частных производных с особенностью на оси симметрии, не являющихся уравнениями типа Ковалевской. Доказано, что линия параболического вырождения для уравнения полного потенциала и уравнения Кармана в осесимметрическом случае является прямой при выполнении условия ее уплощения. Выяснен смысл наличия особенностей на линии параболического вырождения, построены решения без особенностей на этой линии.

Практическая ценность. Построенные ряды являются асимптотическими по отношению к точным решениям, что дает возможность применять их при решении прикладных задач. В трансзвуковом течении установлено наличие прямой звуковой линии с особенностью на конечном расстоянии от оси симметрии в случае осевой симметрии. Построены конкретные примеры околозвуковых течений, позволяющие строить сопла произвольного радиуса.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на XXXV Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(ИММ УрО РАН, 2004); Всероссийской конференции "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение" (Новосибирск, 2004); XX Всероссийской школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (Абрау-Дюрсо, 2004); II Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (Абрау-Дюрсо, 2004); V межвузовской научно-технической конференции "Молодые ученые - транспорту" (УрГУПС, 2004) [?]; XXXVI Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (ИММ УрО РАН, 2005) [?]; международной конференции "VII Забабахинские научные чтения" (Снежинск, 2005); VI межвузовской научно-технической конференции "Молодые ученые - транспорту" (УрГУПС, 2005); XXXVII Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (ИММ УрО РАН, 2006) [?]; XXI Всероссийская конференция "Аналитические методы в газовой динамике" (Санкт-Петербург, 2006); на расширенном семинаре по дифференциальным уравнениям отдела прикладных задач (ИММ УрО РАН, август, 2006); на семинарах "Дифференциальные уравнения и их приложения" (каф. "Прикладная математика", УрГУПС). Доложенные на конференциях результаты, в дополнение к основным публикациям [?]–[?], отражены в 8 тезисах докладов:

1. Курмаева К.В. Квазианалитические трансзвуковые течения // Тезисы докладов XX Всероссийской школы-семинара "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (САМГОП – 2004). – Абрау–Дюрсо, 2004. – С. 48 – 49.

2. Курмаева К.В. Исследование прямой звуковой линии в осесимметричном потоке // Тезисы докладов II Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (Абрау – Дюрсо, 8–11 сентября 2004 г.). – Екатеринбург: УрО РАН, 2004. – С. 64 – 65.

3. Курмаева К.В., Титов С.С. Исследование прямой звуковой линии в осесимметричном потоке (история и результаты) // Тезисы докладов XIV зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь: УрО РАН, 2005. – С. 184.

4. Курмаева К.В., Титов С.С. Логарифмические особенности в течениях // Тезисы докладов VI международной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике, физике" (Новосибирск, 27–31 мая 2005 г.). – Новосибирск: институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. – С. 58.

5. Курмаева К.В. Аналитическое построение нестационарного осесимметрического течения газа // Тезисы докладов международной конференции "VII Забабахинские научные чтения" (Снежинск, 5–10 сентября 2005 г.). – Снежинск: Издательство РФЯЦ–ВНИИТФ, 2005. – С. 206.

6. Курмаева К.В. Прямая звуковая линия в осесимметричном потоке // Тезисы докладов XXI Всероссийской конференции "Аналитические методы в газовой динамике" (САМГАД-2006, 5–10 июля 2006 г.). – Санкт-Петербург: Инст-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Инст-т проблем машиноведения РАН, 2006. – С. 51.

7. Курмаева К.В., Титов С.С. Конфигурации течений с особенностью // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. 2. (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г.). – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2006. – С. 118 – 119.

8. Курмаева К.В. Возможность отсутствия особенностей на прямой звуковой линии // Тезисы докладов III Всероссийской конференции "Актуальные

проблемы прикладной математики и механики" (Абрау – Дюрсо, 4–10 сентября 2006 г.). – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 116.

Публикации.

Основные положения диссертации опубликованы в 8 работах [**?**]–[**?**]. В работах [**?**, **?**, **?**], написанных совместно с научным руководителем, постановка задачи и общая схема исследования принадлежат С.С. Титову, результаты, включенные в диссертацию, принадлежат лично К.В. Курмаевой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, девяти параграфов, имеющих сквозную нумерацию, заключения, списка литературы, содержащего 109 наименований. Объем диссертации составляет 122 страницы.

Содержание диссертации

Введение.

Глава 1. Решение нелинейных уравнений в частных производных для осесимметричных течений идеального газа.

1.1. Аналог теоремы Ковалевской в задаче построения ближнего поля нестационарного трансзвукового течения около тонкого тела вращения.

1.2. Обобщение аналитических решений Овсянникова.

1.3. Решение характеристической задачи Коши для осесимметричного уравнения потенциала с данными на оси симметрии.

1.4. Задача Коши для уравнения, описывающего течения продуктов детонации с данными на оси симметрии.

1.5. Постановка задачи аналитического построения нестационарного осесимметрического течения газа при отражении слабого разрыва от оси симметрии.

Глава 2. Решение проблемы Овсянникова о прямой звуковой линии в осесимметричных течениях.

2.1. Особенности прямой звуковой линии для уравнения Овсянникова-Похожаева в осесимметричном потоке.

2.2. Решение осесимметрической задачи о прямой звуковой линии в трансзвуковом приближении.

2.3. Уравнение полного потенциала скоростей в осесимметрической задаче о прямой звуковой линии.

2.4. Прямая звуковая линия без особенностей.

Заключение.

Во введении обоснована актуальность темы, содержится обзор истории и современного состояния исследуемых проблем, приведен обзор литературы, дано краткое изложение основных результатов работы.

В **главе 1** "Решение нелинейных уравнений в частных производных для осесимметричных течений идеального газа" рассматривается построение аналитических решений в виде специальных рядов для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с особенностью на оси, описывающих осесимметричные течения газовой динамики. В отличие от работ С.В. Вершинина, в которых решения задач газовой динамики с особенностью построены методом последовательных приближений в пространстве годографа, в этой главе решения построены с применением формализма специальных логарифмических рядов в физическом пространстве.

В разделе **1.1** "Аналог теоремы Ковалевской в задаче построения ближнего поля нестационарного трансзвукового течения около тонкого тела вращения" [**?**] рассмотрена одна из стандартных задач асимптотической модели Линя-Рейсснера-Тзяня нестационарного трансзвукового течения

$$2u_{xt} + u_x u_{xx} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r = 0, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \tag{1}$$

с краевым условием, полученным сносом условия обтекания с тонкого тела на ось симметрии

$$\lim_{r \to 0} r u_r = h(x,t) h'(x,t). \tag{2}$$

К рассматриваемому уравнению (**??**) не применима теорема Ковалевской: во-первых, оно не относится к классу уравнений типа Ковалевской из-за наличия в нем особенности $1/r$; во-вторых, при $r = 0$ краевое условие задается не в классе аналитических функций, а именно – имеется особенность типа $\ln r$ при $r \to +0$. Построение решения в виде формального ряда представляется достаточно естественным. Но без специального исследования нельзя утверждать даже то, что ряд является асимптотическим по отношению к точному решению задачи обтекания. Это делало бы его неприменимым к решению прикладных задач. Для построения решения применен метод логарифмических рядов по степеням расстояния до оси симметрии r и его логарифма $\ln r$

в окрестности данной точки на оси симметрии

$$u = \varphi(x,t,r,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,t,\rho) r^n, \rho = \ln r, \tag{3}$$

где время t входит в полученное решение как пассивный параметр.

Для ряда (**??**) найден нулевой коэффициент ряда

$$\varphi_0(x,t,\rho) = \alpha(x,t)\rho + \beta(x,t), \tag{4}$$

где $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$– произвольные функции от x, t (в дальнейшем предполагаемые аналитическими), а также, для коэффициентов ряда (**??**) получена рекуррентная цепочка уравнений

$$\varphi_n(x,t,\rho) = e^{-n\rho} \int\limits_{-\infty}^{\rho} (\rho - \tau) e^{n\tau} F_n(x,t,\tau) d\tau, \tag{5}$$

где

$$F_n(x,t,\rho) = 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\varphi_{n-2} + \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_m \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{n-m-2}, \tag{6}$$

позволяющая доказать сходимость построенного ряда методом специальных мажорант.

Основным результатом раздела является аналог теоремы Ковалевской – теорема существования и единственности решения краевой задачи обтекания для данного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных с особенностью

Теорема 1. Для любых функций $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$ аналитических в окрестности точки $x = x_0$, $t = t_0$, существует единственное решение задачи (**??**), (**??**) в виде ряда (**??**), которое представляет собой аналитическую функцию по переменным x, t, r в области $|x - x_0| < x_*$, $|t - t_0| < t_*$, $0 < r < r_*$, для некоторых достаточно малых $x_* > 0$, $t_* > 0$, $r_* > 0$.

Это теорема доказана как аналог теорем Ковалевской и Овсянникова, несмотря на наличие особенности на оси симметрии.

В разделе **1.2** "Обобщение аналитических решений Овсянникова" [**?**] рассмотрено решение уравнения потенциала скорости стационарного осесимметричного движения идеального газа

$$2\Phi_r\Phi_z\Phi_{rz} + (\Phi_z^2 - \Theta)\Phi_{zz} - \Theta\left(\Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r\right) + \Phi_r^2\Phi_{rr} = 0, \tag{7}$$

где Θ – квадрат скорости звука, определяемый равенством

$$\Theta = (\gamma - 1)\left[K - \frac{1}{2}\Phi_r^2 - \frac{1}{2}\Phi_z^2\right], \tag{8}$$

в окрестности данной точки на оси симметрии в виде двойного ряда по степеням расстояния до оси симметрии и его логарифма

$$\Phi = \varphi(\rho, r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\rho, z) r^n, \rho = \ln r. \tag{9}$$

Выделение особенности осуществляется путем определения такой степени r, при которой домноженная на нее поперечная производная не стремилась бы к бесконечности, а именно найдено такое ε, что

$$\lim_{r \longrightarrow 0} r^{\varepsilon}\varphi_r = \bar{\alpha}(z),$$

где $\bar{\alpha}(z)$ – произвольная аналитическая функция переменной z. В рассматриваемом случае получено, что $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, что обосновывается после доказательства сходимости построенного асимптотического ряда. При этом потенциал φ остается аналитической функцией переменных r, z при малых r отличных от нуля. Поставленную задачу назовем обобщенной задачей Коши. Обобщенной в том смысле, что на начальном многообразии $r = 0$ задается не значение производной φ_r искомой функции φ, а некоторое предельное соотношение с ее участием при $r \longrightarrow +0$. Оказалось, что в данном случае эта обобщенная задача Коши имеет решение, а именно при малых r функция $\varphi(r, z)$ асимптотически представляется в виде

$$\varphi \sim \varphi_0 = \alpha(z) r^{\delta} + \beta(z), \quad \text{при} \quad r \longrightarrow +0, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{2}{\gamma + 1}, \tag{10}$$

отсюда $\bar{\alpha}(z) = \delta\alpha(z)$.

Найденное φ_0 естественно назвать обобщенными начальными данными решаемой задачи Коши. Необходимо отметить, что произвольность задаваемых функций определяет целый класс аналитических решений рассматриваемого уравнения. Более того, оказалось возможным считать φ_0 нулевым коэффициентом логарифмического ряда, сходящегося при малых положительных r

$$\varphi_0(\rho, z) = \alpha(z)e^{\frac{2}{\gamma+1}\rho} + \beta(z) = \alpha(z)r^{\delta} + \beta(z). \tag{11}$$

Для коэффициентов ряда получена рекуррентная цепочка уравнений

$$\varphi_n(\rho, z) = \frac{(\gamma+1)^2}{4\alpha^2(z)} \left[e^{-n\rho} \int\limits_{-\infty}^{\rho} F_n(\tau, z) e^{\left(n-\frac{4}{\gamma+1}\right)\tau} d\tau - \right.$$

$$\left. - e^{-\left(n-\frac{2}{\gamma+1}\right)\rho} \int\limits_{-\infty}^{\rho} F_n(\tau, z) e^{\left(n-\frac{6}{\gamma+1}\right)\tau} d\tau \right]. \tag{12}$$

Сходимость построенного ряда доказана методом специальных мажорант. Доказана теорема существования и единственности решения обобщенной задачи Коши для данного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (**??**)

Теорема 2. Для любых аналитических в окрестности точки $z = z_0$ функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$ существует единственное решение задачи (**??**), (**??**) в виде ряда (**??**), которое представляет собой аналитическую функцию по переменным z, r в области $|z - z_0| < z_*$, $0 < r < r_*$, для некоторых достаточно малых $z_* > 0$, $r_* > 0$.

В разделе **1.3** "Решение характеристической задачи Коши для осесимметричного уравнения потенциала с данными на оси симметрии" [**?**] используя анализ коэффициентов ряда (**??**) в разделе 1.2

$$\varphi_n = 0, \quad \text{для нечетных} \;\; n, \tag{13}$$

$$\varphi(r, \rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sum_{k=-1}^{l} \lambda_{n,k}(z) e^{-k\delta\rho}, \quad \text{для четных} \;\; n, \tag{14}$$

где $\quad l = \begin{cases} n-1, & \text{при } n \geq 1; \\ 0, & \text{при} \quad n = 0, \end{cases} \quad$ и $\quad \delta = \dfrac{2}{\gamma+1},$

или

$$\varphi_n = \lambda_{n,-1}(z)e^{\delta\rho} + \lambda_{n,0}(z)e^{0\cdot\delta\rho} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,k}(z) e^{-k\delta\rho},$$

рассмотрено решение уравнения (**??**) в виде двойного ряда по дробным и целым степеням расстояния от оси симметрии без привлечения логарифма расстояния до оси симметрии

$$\varphi(q,s,z)=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\eta_{n,m}(z)q^n s^m=\frac{1}{s}\eta(q,s,z), \tag{15}$$

где $l=\begin{cases} n, \text{ при } n\geq 1; \\ 1, \text{ при } \quad n=0,\end{cases}$

$$\eta(q,s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\eta_{n,m}(z)q^n s^m, \quad \text{где } l=\begin{cases} n, \text{ при } n\geq 1; \\ 1, \text{ при } \quad n=0,\end{cases} \tag{16}$$

где обозначено $s=r^{-\delta}$, $q=r^2$, $m=k+1$, $\eta_{n,m}(z)=\lambda_{n,m-1}(z)$, причем

$$\eta_{0,0}(z)=\alpha(z); \quad \eta_{0,1}(z)=\beta(z);$$

$$\eta_{0,m}(z)=0, \quad \text{при } m>1. \tag{17}$$

В переменных r,z, получен следующий результат

Теорема 3. Для любых аналитических в окрестности точки $z=z_0$ функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$ существует единственное решение задачи (**??**), (**??**) в виде ряда (**??**), которое представляет собой аналитическую функцию по переменным z, r в области $|z-z_0|<z_*$, $0<r<r_*$, для некоторых достаточно малых $z_*>0$, $r_*>0$.

В разделе **1.4** "Задача Коши для уравнения, описывающего течения продуктов детонации с данными на оси симметрии" [**?**] построено решение уравнения (**??**), описывающего течения продуктов детонации с показателем адиабаты $\gamma=3$ в виде простого ряда по дробным степеням расстояния до оси симметрии в окрестности точки $z_0=0$

$$\varphi(q,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z)q^n, \quad q=\sqrt{r}, \tag{18}$$

$$\text{причем } \varphi_0(z)=\varphi|_{q=0}=\beta(z), \quad \varphi_1(z)=\varphi_q|_{q=0}=\alpha(z).$$

Это осуществлено на основе результатов, полученных в разделах 1.2, 1.3.

Теорема 4. Для любых аналитических в окрестности точки $z=z_0$ функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$ существует единственное решение задачи (**??**) в виде ряда (**??**), которое представляет собой аналитическую функцию по переменным z, r в области $|z - z_0| < z_*$, $0 < r < r_*$, для некоторых достаточно малых $z_* > 0$, $r_* > 0$.

В разделе **1.5** "Постановка задачи аналитического построения нестационарного осесимметрического течения газа при отражении слабого разрыва от оси симметрии" поставлена в аналитическом виде задача об отражении слабого разрыва от оси симметрии в модели мелкой воды в виде слабого разрыва, на основе анализа структуры коэффициентов характеристического ряда, описывающего течение газа в окрестности оси симметрии, проведенного в разделах 1.2, 1.3, 1.4. В рамках этой задачи рассмотрено три области, описывающие три различных состояния мелкой воды в момент ее растекания по ровной твердой поверхности. Границами этих областей являются падающая и отраженная волны.

Для решения поставленной задачи приняты следующие условия.

1. Условие осевой симметрии, справедливое на оси симметрии $r = 0$ за исключением точки, описывающей время прихода слабого разрыва на поверхности мелкой воды к центру или оси симметрии, или же (в плоском случае) – столкновения этой волны со стенкой.

2. Условие стыковки на падающей волне.

3. Условие стыковки на отраженной волне.

Приближенное решение задачи сведено к системе двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. В общем случае задача подбора этих двух произвольных функций приводится к задаче нахождения частного решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Нахождение частного решения этой нелинейной системы имело бы как чисто математическое, так и прикладное значение решения задачи о возможности отражения слабого разрыва от оси симметрии в виде также слабого разрыва. Исследование, приведенное в разделе 1.5, иллюстрирует теоретические результаты, полученные в разделах 1.2 – 1.4, и не относится к основным результатам диссертационной работы.

В **главе 2** "Решение проблемы Овсянникова о прямой звуковой линии в осесимметричных течениях" в классе аналитических решений рассмотрена задача о прямой звуковой линии и наличии на ней особенностей на конечном расстоянии от оси симметрии в осесимметричных течениях. Этот результат является непосредственным обобщением теоремы Овсянникова с плоского случая на осесимметрический, и получается применением той же методики, но с модификациями, которые потребовал переход от плоского случая к осесимметрическому, например, Л.В. Овсянников исследует систему дифференциальных уравнений вектора скорости (u, v), в данной работе – непосредственно уравнение потенциала скорости. Результат, полученный в диссертации, заключается в выведении предположений О.С. Рыжова, У.Г. Пирумова из более слабых гипотез. Задача о прямой звуковой линии ставится не в виде Гёртлера, О.С. Рыжова, У.Г. Пирумова, Ф.И. Франкля, а в виде Л.В. Овсянникова. Доказательство того, что звуковая линия является прямой, предложенное в данной работе, вытекает из задания на оси симметрии распределения скорости, имеющей равную нулю первую производную в звуковой точке.

Исследование звуковой линии проведено в три этапа. Первоначально было изучено преобразование уравнения Овсянникова-Похожаева

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{\nu}{r} u_r = 18(\gamma + 1) u^2. \tag{19}$$

Известно, что общее решение (**??**) в плоском случае ($\nu = 0$) выражается через эллиптические функции.

На следующем этапе проведено исследование трансзвукового уравнения Ка́рмана

$$\triangle \varphi = \varphi_{rr} + \frac{\nu}{r} \varphi_r = (\gamma + 1) \varphi_z \varphi_{zz}, \tag{20}$$

в плоском и осесимметрическом случае; здесь φ – малое возмущение потенциала звукового течения, Δ – оператор Лапласа по поперечным координатам x, y. Уравнение (**??**) получается из уравнения (**??**) подстановкой $\varphi(r, z) = u(r) z^3$. Исследование уравнений Овсянникова-Похожаева и Кармана привели к отдельным математическим (газодинамическим) результатам: для данных уравнений обосновано наличие особенностей на прямой звуковой линии в осесимметрическом случае, для второго – доказано, что звуковая линия является прямой. Кроме этого, их исследование имеет методическую ценность, а именно предложенный метод позволяет проследить за особенностями решений как рассмотренных уравнений, так и (**??**), а также констатировать их обязательное наличие в осесимметричных течениях. Изучение уравнений Овсянникова-Похожаева и Кармана рассмотрено в разделе **2.1** "Особенности прямой звуковой линии для уравнения Овсянникова-Похожаева в осесимметричном потоке" и в разделе **2.2** "Решение осесимметрической задачи о прямой звуковой линии в трансзвуковом приближении". Отметим, что в случае осевой симметрии рассуждения значительно усложняются, поскольку в уравнениях возникает особенность, и поэтому они перестают быть уравнениями типа Ковалевской. Например, известно, что групповые свойства уравнения Кармана с осевой симметрией существенно отличаются от групповых свойств плоского уравнения Кармана. В связи с этим не существует регулярного преобразования, приводящего уравнение (**??**) с $\nu = 1$ к уравнению с $\nu = 0$. Кроме того, многие рассуждения, применимые в плоском случае, теряют свою силу в осесимметрическом.

С целью исследования соответствующих прикладных газодинамических вопросов задачу перенесения результатов о прямой звуковой линии на случай осевой симметрии можно разделить на две:

1. Будет ли прямой звуковая линия при условии ее уплощения в центре течения на оси сопла?

2. Обязательно ли на прямой звуковой линии имеется особенность на конечном расстоянии от оси симметрии?

Решение этих задач в разделе 2.2 дают

Теорема 5. Пусть в окрестности центра течения O на оси симметрии потенциал трансзвукового течения $\Phi = \Phi(0, z)$ – аналитическая функция, удовлетворяющая в этой окрестности условию осевой симметрии $\Phi_r(0, z) = 0$, условию уплощения звуковой линии в центре течения $\Phi_{zz}(0, 0) = 0$. Тогда точка O принадлежит прямой звуковой линии $z = 0$ при $0 \le r < r_*$ (при некотором $r_* > 0$).

Теорема 6. Если потенциал Φ на оси симметрии $r = 0$ является аналитической функцией в окрестности точки $z = 0$, и скорость ускорения газа в центре течения отлична от нуля $\Phi_{zzz} \ne 0$, то в трансзвуковом приближении Кармана на прямой звуковой линии на конечном расстоянии от оси симметрии существуют особые точки течения, соответствующие обращению функции Φ в бесконечность.

В разделе **2.3** "Уравнение полного потенциала скоростей в осесимметрической задаче о прямой звуковой линии" проведены исследования в предположении, что потенциал на оси симметрии при $r = 0$ является аналитической функцией по степеням z в окрестности точки $z = 0$. Доказана

Теорема 7. Пусть в окрестности центра течения O на оси симметрии потенциал течения $\Phi = \Phi(0, z)$ – аналитическая функция, удовлетворяющая в этой окрестности условию осевой симметрии $\Phi_r(0, z) = 0$, условию уплощения звуковой линии в центре течения $\Phi_{zz}(0, 0) = 0$. Тогда точка O принадлежит прямой звуковой линии $z = 0$ при $0 \le r < r_*$ (при некотором $r_* > 0$).

Исследование свойств звуковой линии проводилось в классе аналитических решений Φ в окрестности оси симметрии, так как Л.В. Овсянниковым доказано, что в случае аналитического распределения скорости на оси решение также будет аналитическим.

Метод, предложенный в разделе 2.2, позволяет проследить за особенностями решений рассмотренных уравнений, в том числе и (**??**), а также констатировать их обязательное наличие в осесимметричных течениях. Таким образом, в разделе 2.3 доказана

Теорема 8. Если потенциал Φ на оси симметрии при $r = 0$ является аналитической функцией в окрестности точки $z = 0$, и скорость ускорения газа в центре течения отлична от нуля $\Phi_{zzz} \neq 0$, то в стационарном течении идеального газа на прямой звуковой линии на конечном расстоянии от оси симметрии существуют особые точки, соответствующие обращению функции Φ в бесконечность.

Раздел **2.4** "Прямая звуковая линия без особенностей" посвящен исследованию прямой звуковом линии без особенностей в трансзвуковом осесимметрическом течении.

Относительно термина "отсутствие особенностей" рассмотрены две трактовки решения уравнения Кармана $\Phi(r, z)$, не имеющего особенностей на прямой звуковой линии, которое:

1) имеет радиус сходимости, стремящийся в бесконечность ($r_* \to +\infty$) при стремлении продольной переменной к нулевому значению ($z \to 0$), что на практике означает возможность построения сопел сколь угодно большого радиуса за счет, может быть, соответствующего уменьшения длины сопла;

2) является аналитическим для любых значений продольной переменной z, взятых из некоторой окрестности $z = 0$, без ограничения на радиальную переменную r, то есть на всей прямой звуковой линии ($r_* = \infty$). В этом случае не будет ограничений на толщину сопла (при некоторой данной его длине), обеспечивающих трансзвуковое течение без особенностей.

В данном разделе изучено, какая из этих возможностей реализуется в действительности.

Анализ решений преобразованного уравнения Кармана показал, что имеются решения в виде

$$\Phi(r,z) = z^s(1 + c_1 z r^2 + c_2 z^2 r^4 + \ldots) = z^s V(t), \tag{21}$$

где $c_1, c_2, \ldots$ – коэффициенты при степенях z, $t = z^{s-3} r^2$ – автомодельная переменная.

Построено для уравнения Кармана семейство автомодельных решений (**??**) в виде

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n. \tag{22}$$

К уравнению для $V(t)$ (**??**) теорема Коши-Ковалевской не применима. Аналитичность ряда (**??**) в окрестности точки $t = 0$ доказана как аналог теорем Коши и Ковалевской с привлечением мажорант Ковалевской. Таким образом, обосновано существование решений, не имеющих особенностей на прямой звуковой линии, радиус сходимости которых стремится в бесконечность ($r_* \to +\infty$) при стремлении продольной переменной к нулевому значению ($z \to 0$).

Второе понимание решения уравнения Кармана, аналитичного для любых значений радиальной r и малой продольной z переменных, исследуется в том смысле, что такое аналитическое решение представляет собой при любом достаточно малом z целую функцию по степеням r:

$$\Phi(r,z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) r + \Phi_2(z) r^2 + \ldots + \ldots \Phi_N(z) r^N + \ldots. \tag{23}$$

Радиус сходимости ряда (**??**) предполагается бесконечным ($r_* = \infty$) для любых значений z, удовлетворяющих неравенству $|z| < z_*$, для некоторого $z_* > 0$. При этом нулевой коэффициент ряда (**??**)

$$\Phi_0(z) = a_4 z^4 + a_5 z^5 + \ldots, \tag{24}$$

предполагается сходящимся рядом при малых значений $|z| < z_*$.

Показана невозможность существования такого решения в частном случае, когда $\Phi(r,z)$ – многочлен по степеням r:

$$\Phi(r,z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) r + \Phi_2(z) r^2 + \ldots + \Phi_N(z) r^N, \tag{25}$$

а также в общем случае – в виде целой функции (**??**), при условии, что нулевой коэффициент $\Phi_0(z)$ является аналитической мажорантой.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации:

1. Доказаны аналоги теорем Ковалевской и Овсянникова для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с особенностью на оси симметрии, описывающих осесимметричные течения газа, построены локально аналитические решения этих уравнений в виде специальных рядов.

2. Доказано, как аналог теоремы Овсянникова, что звуковая линия в осесимметричном течении является прямой при условии уплощения в центре течения, и на ней содержатся особенности при условии отличия от нуля скорости ускорения газа в центре течения, как в трансзвуковом приближении, так и в точной постановке для уравнений газовой динамики.

3. Предложен аналог теоремы Ковалевской для конструктивного доказательства существования аналитического решения, реализующего трансзвуковое течение без особых точек на прямой звуковой линии в случае осевой симметрии; доказана невозможность существования трансзвукового решения, реализующего течение с прямой звуковой линией без особенностей, в виде целой функции поперечной переменной, нулевой коэффициент которой является многочленом от продольной переменной или аналитической мажорантой.

Публикации автора по теме диссертации

1. Курмаева К.В., Титов С.С. Особенности прямой звуковой линии симметричного потока в трансзвуковом приближении. – Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.24 / Казанское математическое общество. Чеботаревские чтения по проблемам современного группового анализа и его приложениям в нелинейной механике // Материалы всероссийской молодежной научной школы-конференции. – Казань: изд-во Казанского математического общества, 2004. – С. 55 – 56.

2. Курмаева К.В. Решение обобщенной задачи Коши для осесимметричного уравнения потенциала с данными на оси симметрии // Труды V межвузовской научно-технической конференции "Молодые ученые – транспорту": В 2-х т. – Екатеринбург: УрГУПС, т. 2. – 2005. – С. 351 – 362.

3. Курмаева К.В. Задача Коши для течений газа с данными на оси симметрии // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды XXXVI Региональной молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – С. 151 – 157.

4. Курмаева К.В., Титов С.С. Аналитическое построение ближнего поля трансзвукового течения около тонкого тела вращения // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005. – Т. VIII. – N. 3(23). – С. 93 – 101.

5. Курмаева К.В., Титов С.С. Обобщение аналитических решений Л.В. Овсянникова для трансзвуковых течений // Прикладная механика и техническая физика, 2005. – Т. 46. – N. 6. – С. 14 – 25.

6. Курмаева К.В. Прямая звуковая линия без особенностей // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды XXXVII Региональной молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 214 – 219.

7. Курмаева К.В. Автомодельные решения без особенностей на прямой звуковой линии // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2006. Материалы научной конференции. – СПб., 2006. – С. 99 – 105.

8. Курмаева К.В. Решение проблемы Овсянникова о прямолинейной звуковой линии в осесимметричных течениях // В "Проблемы прикладной математики"; В 2-х т.; Т. 1. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – С. 166 – 211.